

## ВОЛНЫ ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ

А. В. ВИНОГРАДОВ

Московский физико-технический институт (технический университет), Долгопрудный Московской обл.

А. Н. ОРАЕВСКИЙ

Московский инженерно-физический институт (технический университет)

### WHISPERING GALLERY WAVES

A. V. VINOGRADOV, A. N. ORAEVSKY

*Whispering galleries has been known in many countries since ancient times. The name itself comes from architectural acoustics, and reflects the fact that sound in closed spaces sometimes propagates not along the shortest path, but rather along concave walls or domes. The relevant physical effect, wave propagation along curved interfaces between two media, is known in other wave processes as well, including light propagation. This paper describes the nature of the phenomenon and its modern applications.*

Шепчущие галереи известны с давних времен в разных странах. Сам термин относится скорее к области строительной акустики и связан с тем, что звук в помещениях иногда распространяется не по кратчайшему пути, а вдоль вогнутых стен или куполов. Соответствующий физический эффект, состоящий в распространении волн вблизи изогнутых границ раздела двух сред, известен и в других волновых процессах, включая распространение света. В работе рассмотрены природа этого явления и его новейшие применения.

[www.issep.rssi.ru](http://www.issep.rssi.ru)

### ВВЕДЕНИЕ

Рядом со знаменитым историческим памятником в Пекине – Храмом неба находится чудесная каменная стена, представляющая собой почти замкнутую окружность. Чудо заключается в том, что звуки или слова, произнесенные тихим голосом в одном из направлений вдоль стены, возвращаются к говорящему с другой стороны, как будто кто-то спустя некоторое время произносит те же слова голосом говорящего, стоя за его спиной.

Современное физическое объяснение эффекта дал Рэлей более ста лет тому назад. Он основывался на собственных наблюдениях, сделанных в старинной шепчущей галерее, находящейся под куполом собора святого Павла в Лондоне (рис. 1). До него королевский астроном приписывал эффект отражению звуковых лучей от поверхности вблизи вершины купола. При этом

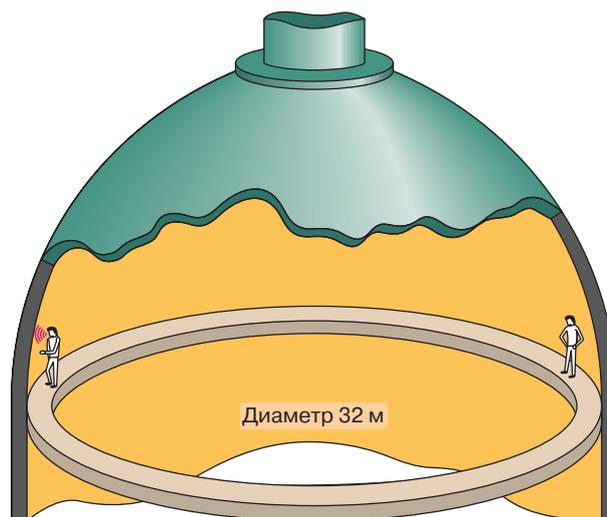


Рис. 1. Шепчущая галерея под куполом собора святого Павла в Лондоне

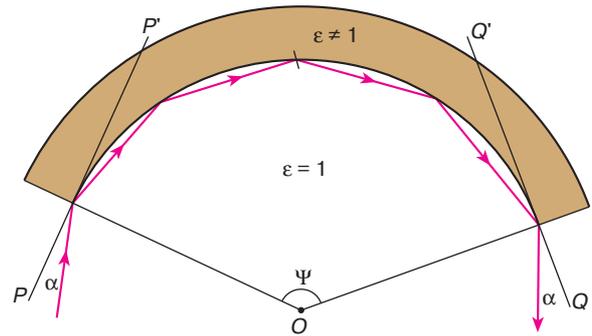
концентрация лучей, прошедших по разным большим дугам купола, имеющего форму полусферы, и вследствие этого усиление звука должны происходить только в точке, диаметрально противоположной источнику звука. Рэлей заметил, что помимо этого эффекта существует еще один: звук цепляется за поверхность стены и ползет вдоль нее, причем необязательно вдоль кратчайшей дуги, соединяющей источник и приемник, а скорее вдоль дуги, к которой шепчущий обращен лицом. Роль вогнутой поверхности купола сводится к тому, что она не дает сечению пучка расширяться так же быстро, как при распространении в свободном пространстве. Если в последнем случае сечение пучка растет пропорционально  $\rho^2$  ( $\rho$  – расстояние от источника), а интенсивность излучения падает пропорционально  $1/\rho^2$ , то в шепчущей галерее излучение заключено в узком слое, примыкающем к поверхности. В результате интенсивность звука внутри этого слоя падает лишь пропорционально  $1/\rho$ , то есть значительно медленнее, чем в свободном пространстве. Это и есть объяснение Рэ-ля. Он подтвердил его прямыми экспериментами, используя свисток как источник звука, а горящую свечу как приемник.

Значительно позже, а именно в начале XX столетия, было установлено, что в диэлектрических шарах могут существовать электромагнитные волны такой же пространственной структуры, как и волны шепчущей галереи. Эти типы волн долго не привлекали к себе внимания вплоть до последнего десятилетия, когда они вдруг стали предметом широкого исследования и применения в оптике. Почему?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо понять, что же такое волны шепчущей галереи, при каких условиях они возникают. Для этого необходимо исследовать структуру поля в диэлектрических телах сферической формы. Однако предварительно ответим на вопрос, каковы должны быть свойства материала, из которого изготовлена стенка, чтобы вблизи нее распространялась электромагнитная волна шепчущей галереи.

### СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

Как известно, взаимодействие электромагнитного излучения с веществом характеризуется диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Рассмотрим для простоты вогнутое зеркало, образованное цилиндрической границей раздела, отделяющей вакуум от вещества (рис. 2). Если на зеркало из вакуума падает луч под углом скольжения  $\alpha$ , то после многократных отражений он выйдет с противоположного конца, образуя, очевидно, все тот же угол  $\alpha$  с поверхностью. Определим интенсивность излучения на выходе для скользящих углов  $\alpha \rightarrow 0$ .



**Рис. 2.** Волна шепчущей галереи у поверхности вогнутого зеркала. Стрелками указаны направления входа и выхода волны.  $O$  – центр кривизны зеркала,  $\alpha$  – угол скольжения,  $PP'$  и  $QQ'$  – касательные к поверхности зеркала

При каждом отражении интенсивность излучения умножается на коэффициент отражения, определяемый формулой Френеля

$$I_{n+1} = |r(\alpha)|^2 I_n, \quad (1)$$

$$r(\alpha) = \frac{\sin \alpha - \sqrt{\epsilon - \cos^2 \alpha}}{\sin \alpha + \sqrt{\epsilon - \cos^2 \alpha}} \approx -1 + 2 \frac{\alpha}{\sqrt{\epsilon - 1}}.$$

Одновременно при каждом отражении луч поворачивается на угол  $2\alpha$ . Поэтому, обогнув зеркало, луч испытает  $N = \Psi/(2\alpha)$  отражений, где  $\Psi$  – угловой раcтвор зеркала. Учитывая (1), находим интенсивность луча после  $N$  отражений

$$I_N = I_0 |r(\alpha)|^{2N} \approx I_0 \left( 1 - 2 \frac{\alpha}{\sqrt{\epsilon - 1}} \right)^{2N}. \quad (2)$$

При малых углах скольжения ( $\alpha \rightarrow 0$ ) однократный коэффициент отражения (1) стремится к 1, но число отражений  $N$  возрастает. Первое обстоятельство приводит к увеличению интенсивности пучка, а второе – к уменьшению. В итоге в пределе  $\alpha \rightarrow 0$  она оказывается не зависящей от угла  $\alpha$ :

$$\frac{I_N}{I_0} = |R(\alpha)|^2 \approx \left| 1 - 2 \frac{\alpha}{\sqrt{\epsilon - 1}} \right|^{2N} \approx \exp \left[ -2\Psi \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{\epsilon - 1}} \right]. \quad (3)$$

Полученная формула описывает волны шепчущей галереи в различных материалах и разных диапазонах длин волн. Например, в случае видимого излучения и стенки, изготовленной из стекла или другого прозрачного материала,  $\epsilon \equiv n_0^2 > 1$  (здесь  $n_0$  – показатель преломления). Для стекла  $n_0 = 1,5$ , используя формулу (3), находим коэффициент отражения волны шепчущей галереи при обороте на  $180^\circ$  ( $\Psi = \pi$ ):  $|R|^2 = e^{-5,617} = 0,36\%$ , что означает сильное ослабление интенсивности. В данном случае это связано с тем, что, выражаясь языком

Рэлея, волна не только ползет вдоль границы раздела, но и просачивается за нее, поскольку помимо отражения присутствует и преломление на границе. В случае алмаза  $n_0 = 2,4$  и аналогичное вычисление показывает, что коэффициент отражения больше:  $|R| = 5,6\%$ . У металлов диэлектрическая проницаемость оказывается комплексной величиной, причем и вещественная и мнимая части  $\epsilon$  велики (более 10). В этих условиях волна шепчущей галереи распространяется практически не поглощаясь.

Таким образом, формула (3) показывает, что благоприятным условием для распространения электромагнитных волн шепчущей галереи является наличие полного внешнего отражения, когда  $\epsilon < 1$ . Тогда показатели экспоненты в (3) чисто мнимый и, следовательно,  $|R| = 1$ . Эффект полного внешнего отражения хорошо известен для рентгеновских лучей, так как для них  $\epsilon < 1$  практически для любого материала.

Экспериментальные исследования рентгеновских волн шепчущей галереи начались недавно. Наблюдаемый коэффициент отражения хотя и велик, но значительно меньше 100% из-за поглощения, связанного с ионизацией внутренних электронных оболочек материала отражателя. Несмотря на это, эффект шепчущей галереи в рентгеновском диапазоне в настоящее время широко обсуждается как одна из немногих возможностей управления пучками рентгеновского излучения.

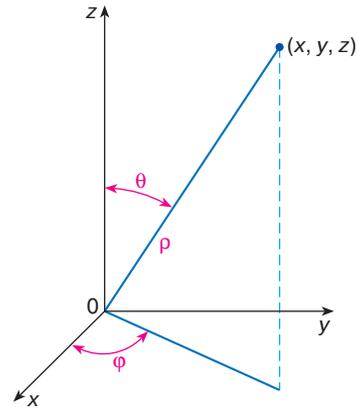
Геометро-оптический подход, использованный в этом разделе, хотя и оказался результативным, не может претендовать на описание полной картины явления. Поэтому, переходя к изучению мод шепчущей галереи в диэлектрических шарах, будем опираться на волновые представления.

### СТРУКТУРА МОД ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ШАРЕ

Для описания волн сферической конфигурации удобно пользоваться сферическими координатами вместо декартовых. В сферической системе координат (рис. 3) положение точки  $(x, y, z)$  определяется ее расстоянием от центра координатной системы  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  и направлением прямой, проведенной в эту точку из центра. Направление ее задается двумя углами  $\theta$  и  $\phi$ . Нетрудно установить связь между сферическими  $(\rho, \theta, \phi)$  и декартовыми  $(x, y, z)$  координатами точки:

$$x = \rho \sin\theta \cos\phi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\phi, \quad z = \rho \cos\theta. \quad (4)$$

Детальное исследование, в основе которого лежат уравнения Максвелла, показало, что электромагнитные волны в диэлектрическом шаре, находящемся в ва-



**Рис. 3.** Декартова и сферическая системы координат

кууме, могут быть описаны с помощью следующего потенциала:

$$U_{mnq}(\rho, \theta, \phi) = C_{mnq} \sqrt{\frac{\pi \epsilon \rho}{2}} J_\nu(\sqrt{\epsilon} k \rho) P_n^{(m)}(\cos\theta) \begin{cases} \sin m\phi, \\ \cos m\phi. \end{cases} \quad (5)$$

В этой формуле введены следующие обозначения: как и ранее,  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость вещества, из которого изготовлен шар;  $\sqrt{\epsilon}$  – показатель преломления вещества; символом  $J_\nu(x)$  обозначена функция Бесселя порядка  $\nu$ , а символом  $P_n^{(m)}(\cos\theta)$  – так называемые присоединенные полиномы Лежандра, причем  $\nu = n + 1/2$ . Величина  $k$  обычно называется волновым числом. Оно связано с частотой колебаний (волн) электромагнитного поля  $\omega_n$  соотношением  $k = \omega_n/c$ , где  $c$  – скорость света в вакууме. Величина  $C_{mnq}$  не зависит от координат. Она определяется энергией волн внутри шара и может зависеть от времени. При увеличении энергии внутри шара она возрастает, при уменьшении убывает. В общем случае ее изменение во времени описывается уравнением

$$\frac{d^2 C_{mnq}}{dt^2} + \frac{2}{\tau_{mnq}} \frac{dC_{mnq}}{dt} + \omega_{mnq}^2 C_{mnq} = F(t), \quad (6)$$

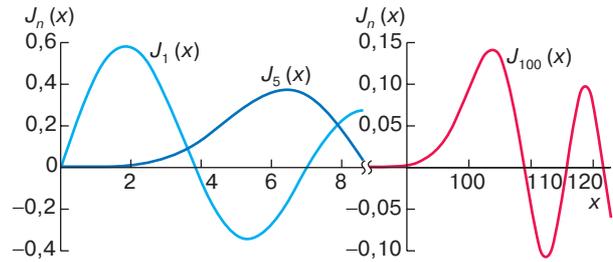
где величина  $F(t)$  линейно связана с напряженностью внешнего электромагнитного поля, возбуждающего поле в шаре.

Математический и физический смысл величин  $\tau_{mnq}$  и  $\omega_{mnq}$ , а также индексов  $m, n, q$  поясним ниже. Здесь же уместно сделать небольшое философское отступление. Формула (5) может насторожить читателя, если он ранее не встречался с функциями Бесселя и полиномами Лежандра. Эти функции относятся к разряду так называемых специальных функций. Однако нам представляется, что деление функций на элементарные и

специальные – дань истории. По существу в этих функциях не больше специального, чем в тригонометрических функциях или логарифмах. Ведь значения  $\sin x$  или  $\log x$  нам известны не более чем значения  $J_\nu(x)$  или  $P_n^{(m)}(\cos\theta)$ : и те и другие рассчитываются по определенным алгоритмам. Просто синусы и логарифмы более привычны, чем “бесселя” и “лежандры”, но получить их численные значения или построить их графики одинаково просто. Вы набираете в программе Mathematica символ  $N[BesselJ[\nu, x]]$  и получаете нужное значение функции Бесселя порядка  $\nu$  в точке  $x$ . Конечно, вместо величин  $\nu$  и  $x$  ставится конкретное число. Символ  $Plot[BesselJ[\nu, x], \{x, 0, x_0\}]$  ( $\nu$  – конкретное число) строит график функции Бесселя в зависимости от  $x$  в интервале  $(0, x_0)$ . То же самое можно сказать и о полиномах Лежандра. И это ничуть не сложнее, чем набирать  $N[\text{Sin}[x]]$  или  $Plot[\text{Sin}[x], \{x, 0, x_0\}]$  для вычисления синуса или построения его графика. Другими словами, компьютеры во многом снимают барьер между элементарными и специальными функциями.

Формулы (5) для потенциалов позволяют по определенным правилам вычислить компоненты векторов электрических и магнитных полей. Здесь формулы для полей не приводятся из-за их относительной громоздкости. Сами по себе они не потребуются для понимания излагаемого материала и нужны лишь для специальных расчетов. Тем не менее важно отметить, что возможные волны в диэлектрическом шаре подразделяются на два класса. Один из этих классов не имеет составляющих (проекций) электрического поля по направлению радиуса шара. Такой класс волн получил название поперечно-электрического и обозначается символом ТЕ. Другой класс волн не имеет радиальной составляющей магнитного поля. Он называется поперечно-магнитным и обозначается символом ТН. Из формул (5) следует, что разные типы волн можно характеризовать тремя индексами –  $m, n, q$ . Поэтому часто пишут: волна ТЕ $_{mnq}$  или волна ТН $_{mnq}$ . Индексы  $m$  и  $n$  явно фигурируют в (5): для разных индексов  $m$  и  $n$  входящие в эту формулу функции различны. Индекс  $\nu$  жестко связан с  $n$ . Но где скрыт индекс  $q$  и что он характеризует? Дело в том, что функция Бесселя, как и синус, является осциллирующей функцией. В отличие от синуса она начинает осциллировать не сразу, а со значений аргумента  $x > \nu$ , и амплитуда осцилляций ее не постоянна, а убывает с ростом аргумента. Это обстоятельство продемонстрировано на рис. 4. Осциллирующая функция Бесселя раз за разом проходит через нуль. Так вот индекс  $q$  показывает, сколько нулей функции Бесселя уместится в пределах радиуса шара.

В чем смысл подразделения волн на классы и типы? Во-первых, каждый тип волны имеет свою специфическую конфигурацию поля: для разных индексов



**Рис. 4.** Функции Бесселя первого, пятого и сотого порядков. На рисунке часть оси абсцисс изъята. На изъятых участках функции  $J_1(x)$  и  $J_5(x)$  продолжают осциллировать, затухая по амплитуде. Функция же  $J_{100}(x)$  на этом участке практически равна нулю

поля имеют разное распределение в пространстве. Но, пожалуй, самое главное состоит в том, что каждый из этих типов имеет разные собственные частоты. Значения собственных частот зависят от индексов и поэтому обозначаются символом  $\omega_{mnq}$ . Если диэлектрический шар будет подвержен воздействию внешней электромагнитной волны, то в шаре возникнет (возбудится) тот тип волны, для которого частота воздействующего поля является резонансной, то есть близкой к его собственной частоте. Это, конечно, не означает, что другие типы волн совсем не возбуждаются, но их амплитуды будут значительно меньше амплитуды резонансного типа. Если предположить, что шар подвергается возбуждению внешней волны, изменяющейся по синусоидальному закону, так что  $F(t) = A \sin \omega t$ , то амплитуда установившихся электромагнитных колебаний (волн) в шаре, согласно уравнению (6),

$$C_{mnq} = \frac{A}{\sqrt{(\omega_{mnq} - \omega)^2 + 1/\tau_{mnq}^2}} \sin(\omega t + \psi_{mnq}), \quad (7)$$

$\text{tg} \psi_{mnq} = 1/(\omega_{mnq} - \omega)\tau_{mnq}$ ; величина  $\psi_{mnq}$  описывает сдвиг фазы между возбуждающим и возбуждаемым полем. Из формулы (7) видно, что наибольшую амплитуду будет иметь тот тип волны, для которого  $\omega_{mnq} = \omega$

Если мода шепчущей галереи поддерживается внешним источником электромагнитного поля, то она будет существовать все время, пока подводится возбуждающая энергия. Но вот внешний источник выключен. Сколько времени просуществует поле внутри шара? Расчеты с использованием уравнения (6) показывают, что поле внутри шара осциллирует, убывая по экспоненциальному закону:

$$C_{mnq}(t) = C_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_{mnq}}\right) \sin(\Omega_{mnq} t + \phi), \quad (8)$$

$$\Omega_{mnq} = \sqrt{\omega_{mnq}^2 - \frac{1}{\tau_{mnq}^2}}.$$

Скорость убывания амплитуды осцилляций определяется параметром  $\tau_{mq}$ , который называется временем жизни моды.

Теперь уже уместно спросить: где ж среди этого множества собственных типов волн диэлектрического шара прячутся собственно моды шепчущей галереи? Для этого надо внимательно всмотреться в структуру полей, описываемых формулами (5). Радиальное распределение поля, описываемое функциями Бесселя  $J_1$  и  $J_5$ , представленными на рис. 4, никак не указывает на то, что это поле прижато к стенке шара. Оно распределено практически по всему объему шара. Однако с увеличением индекса  $\nu$  поведение функции Бесселя существенно меняется. На том же рис. 4 изображена функция Бесселя с большим значением индекса ( $\nu = 100$ ). Видно, что с возрастанием индекса интервал от начала координат до первого максимума функции резко возрастает. С увеличением индекса он становится много больше интервалов между последующими максимумами. Если индекс волны таков, что первый нуль размещается вблизи радиуса шара, то практически все поле этой волны будет расположено в очень узкой области вблизи поверхности шара. Это и есть волна (или иначе мода) шепчущей галереи.

Из оптики известно, что луч света на границе перехода из оптически более плотной среды в оптически менее плотную среду может претерпеть полное внутреннее отражение, если будет падать на поверхность раздела под достаточно малым углом. Волну шепчущей галереи можно трактовать как волну полного внутреннего отражения луча от поверхности диэлектрического шара. Однако если поверхность раздела имеет кривизну (как, например, в случае шара), то внутреннее отражение не бывает полным: часть волны все-таки просачивается из шара наружу. Просачивание тем меньше, чем больше радиус шара в сравнении с длиной волны. Длина волны слышимого нами звука порядка нескольких сантиметров. Именно поэтому звуковые волны шепчущей галереи существуют в круглых залах многометрового радиуса. Длина волны видимого электромагнитного излучения (света) порядка долей микрона. Поэтому в диэлектрическом шаре, радиус которого порядка десятка микрон, уже может существовать электромагнитная (световая) волна шепчущей галереи.

Индекс  $m$  в формулах (5) показывает, сколько длин волн укладывается вдоль длины окружности на поверхности шара. Так как длина волны в моде шепчущей галереи значительно меньше радиуса шара, то это объясняет, почему индексы моды шепчущей галереи должны быть большими. Расчет показывает, что затухание волн в шаре тем меньше, чем ближе  $m$  к  $n$  и чем меньше значение индекса  $q$ . Но чем меньше значение  $q$ , тем волны ближе прижаты к поверхности шара. Поэтому к модам

шепчущей галереи обычно относят волны с индексами  $q = 1$  и  $m = n$ ,  $n \gg 1$ , хотя и другие волны, индексы которых немного отклоняются от указанных соотношений, близки к ним по своим свойствам.

При  $m = n$  присоединенный полином Лежандра  $P_n^n(\cos\theta) = \cos^2\theta$ , так что многие расчеты, касающиеся мод шепчущей галереи, упрощаются.

Так как  $m = n$  и  $q = 1$ , то собственные частоты  $\omega_n$  мод шепчущей галереи зависят фактически от одного индекса и выражаются через радиус шара  $R$  и диэлектрическую проницаемость материала шара  $\epsilon$ . Ориентировочное значение собственной частоты дается простой формулой

$$\omega_n \approx \frac{c \nu}{a \sqrt{\epsilon}} \quad \text{или} \quad \lambda_n \approx 2\pi \frac{\sqrt{\epsilon} a}{\nu}. \quad (9)$$

Более точное значение частоты можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned} \omega_{\nu}^{\text{TH}} &\approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon} a} \left( \nu + 1,8557 \nu^{1/3} - \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon - 1}} \right), \\ \omega_{\nu}^{\text{TE}} &\approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon} a} \left( \nu + 1,8557 \nu^{1/3} - \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon - 1}} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Оказывается, что частоты различных классов волн (ТЕ и ТН) различаются между собой. Формулы (10) говорят о том, что частота мод не зависит от индекса  $m$ . Поэтому моды с индексом  $m$ , отличным от  $n$ , имеют те же самые частоты. Явление, когда моды разной конфигурации имеют одинаковые частоты, получило название вырождения. Это значит, например, что, желая возбудить моду шепчущей галереи, для которой  $m = n$ , путем подбора частоты возбуждающего сигнала мы с неизбежностью возбудим и другие моды, для которых  $m \neq n$ . Однако практически такой опасности не существует. Дело в том, что в реальности тело никогда не бывает идеальным шаром. Оно может быть немного сплюснутым в одном направлении и слегка раздуто в другом, то есть у реального тела имеется небольшая эллиптичность. Эллиптичность устраняет вырождение частот, так что моды с разными индексами  $m$  будут иметь различные частоты. Например, для тела, являющегося эллипсоидом вращения

$$\omega_{mn} \approx \omega_n \left( 1 \pm e \frac{2n^2 - m^2}{n^2} \right), \quad (11)$$

где  $e$  — эксцентриситет эллипсоида. Знак плюс относится к случаю вращения эллипсоида около малой оси, знак минус — при вращении около большой оси. Формула (11) справедлива, если эллипсоид мало отличается от шара, то есть если  $e \ll 1$ . Видно, что сжатие или

растяжение шара при  $m \neq n$  приводит к различию частот с разными  $m$ .

Как уже отмечалось, одним из факторов, определяющих время жизни, является конечная кривизна сферической поверхности. Это время может быть рассчитано с помощью следующей формулы:

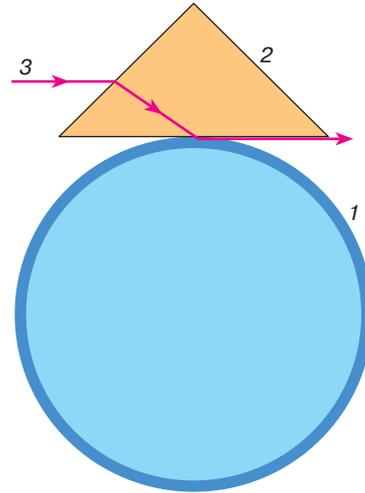
$$\tau_n = \frac{a}{c} \epsilon \sqrt{\epsilon - 1} \left( \sqrt{\epsilon} + \sqrt{\epsilon - 1} - \sqrt{\frac{\epsilon - 1}{\epsilon}} \right)^n. \quad (12)$$

Видно, что оно существенно зависит от того, насколько диэлектрическая проницаемость шара отличается от единицы. При  $\epsilon \rightarrow 1$  время жизни стремится к нулю. В этом случае не происходит концентрации электромагнитной энергии в диэлектрическом шаре. Но если  $\epsilon > 1$ , оно резко возрастает при увеличении отношения радиуса шара к длине волны, так как  $v$  пропорционально этому отношению. Для шара малого радиуса оно может быть малым, а при увеличении радиуса может достигать исключительно больших значений. Например, для кварцевого шара ( $\epsilon \approx 2,37$ ) с радиусом  $a = 1,5$  мкм и света с длиной волны в вакууме  $0,5$  мкм  $v \approx 30$ , так что время жизни, обусловленное кривизной шара, составляет около одной сотой секунды. Но уже при радиусе шара в  $15$  мкм  $v \approx 300$  и соответствующее время жизни становится астрономически большим. Поэтому при таких параметрах не кривизна поверхности шара в конечном счете определяет реальное время затухания. Реальное время затухания определяется несовершенством (шероховатостью) поверхности шара и несовершенством кристаллической структуры материала, из которого изготовлен диэлектрический шар. Оказывается, что в изготовленном по современной технологии кварцевом шаре время жизни моды может достигать в оптическом диапазоне  $10^{-5}$  с. На первый взгляд кажется, что это очень короткое время. Например, подвешенный на нитке массивный шарик будет свободно колебаться в воздухе несколько минут. Но качество осциллятора определяется не абсолютным временем затухания колебаний, а тем, сколько колебаний совершит осциллятор за время затухания. И вот этот показатель, обозначаемый обычно буквой  $Q$  и называемый добротностью, для шарика на ниточке порядка  $500-1000$ , а для моды шепчущей галереи кварцевого шарика превышает десять миллиардов ( $10^{10}$ )!

Итак, поле шепчущей галереи прижато к поверхности шара. Его максимум в зависимости от типа моды лежит либо на поверхности шара, либо внутри него на небольшом расстоянии от поверхности. Вне шара ( $\rho > a$ ) поле спадает по закону  $\exp[-2\pi\sqrt{\epsilon-1}(\rho-a)/\lambda]$ .

Чтобы возбудить какую-либо моду шепчущей галереи в шаре, недостаточно совпадения частоты внешнего поля с собственной частотой моды. Поскольку поле

шепчущей галереи скользит по поверхности шара, необходимо и внешнее поле подвести скользящим образом. Это может быть достигнуто, например, с помощью призмы полного внутреннего отражения (рис. 5). В призме полного внутреннего отражения луч у основания призмы скользит вдоль него и направление его распространения совпадает с направлением скользящего луча моды шепчущей галереи.



**Рис. 5.** Возбуждение волн шепчущей галереи в диэлектрическом шаре (1) с помощью призмы (2); (3) – луч возбуждающего источника

Приведенные выше формулы получены для диэлектрического шара, находящегося в вакууме. Как известно, диэлектрическая проницаемость вакуума равна единице. Все они остаются в силе и для шара, погруженного в диэлектрик с любой диэлектрической проницаемостью, если в них  $\epsilon$  заменить на отношение диэлектрической проницаемости шара к диэлектрической проницаемости среды, в которую он погружен. При этом следует подчеркнуть еще раз, что для существования мод шепчущей галереи диэлектрическая проницаемость шара непременно должна быть больше диэлектрической проницаемости среды.

### ПРИМЕНЕНИЯ МОД ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ В ОПТИКЕ

Два основных свойства мод шепчущей галереи обуславливают их применения. Во-первых, это уже отмеченное ранее большое значение их добротности. Большая добротность моды обуславливает остроту резонанса моды: незначительное отклонение частоты возбуждающего поля от собственной частоты моды ведет к резкому падению ее амплитуды, как это следует из формулы (7).

Другим важным свойством мод шепчущей галереи является малость объема, реально занимаемого полем, по сравнению с объемом всего шара. Действительно, поле моды расположено в приповерхностном слое малой толщины. Но это еще не все. Поле не разлито равномерно по поверхности, а занимает на поверхности узкую ленту (узкий угловой сектор). В целом объем, занимаемый полем моды шепчущей галереи, приблизительно обратно пропорционален  $\nu$  и для  $\nu \geq 1000$  составляет тысячные доли от объема шара. Поэтому моды шепчущей галереи оказываются полезными там, где необходимы высокочастотные резонансные устройства или устройства, эффективно концентрирующие электромагнитную энергию. Таких обстоятельств оказывается немало. Приведем несколько примеров использования мод шепчущей галереи.

1. Одним из наиболее широко применяемых лазеров является инжекционный полупроводниковый лазер. Читатель знаком с его применениями в лазерных принтерах, проигрывателях и дисководах для компакт-дисков. Полупроводниковые лазеры являются неотъемлемым элементом линий волоконной оптической связи. Такое широкое применение они нашли благодаря исключительно малым размерам и высокому КПД. Однако полупроводниковые лазеры генерируют сравнительно широкий спектр частот. Это обстоятельство ограничивает возможность их применений для точных частотных измерений. Поэтому исследователи и инженеры разрабатывают методы сужения спектра генерации полупроводниковых лазеров с помощью внешних резонансных устройств. Моды шепчущей галереи в кварцевых микрошарах являются одним из лучших кандидатов для решения проблемы частотной стабилизации полупроводникового лазера.

2. В технике оптического эксперимента бывает необходимо световой луч одной частоты (длины волны) преобразовать в луч другой частоты. Например, луч, генерируемый гранатовым лазером и имеющий длину волны около одного микрона (невидимое глазом излучение), путем пропускания его через специальный нелинейный материал может быть преобразован в луч с удвоенной частотой – зеленый. Такие преобразователи частоты (длины волны) лазерного излучения работают эффективно только при значительных напряженностях электромагнитных полей. Создание полей большой

напряженности требует применения источников света достаточно большой мощности. Возможность накопления энергии в моде шепчущей галереи в микрошаре, сделанном из нелинейного материала, и концентрация ее вблизи поверхности шара позволяют значительно уменьшить требуемую для преобразования мощность и создать микроминиатюрные преобразователи частоты лазерного излучения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Стрэтт Дж. (лорд Рэлей). Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955. Т. 2. 476 с.
2. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М.; Л.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1948. 539 с.
3. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио. 1966. 475 с.
4. Уоркер Дж. Фейерверк физики. М.: Мир, 1979. 287 с.
5. Брагинский В. Б., Ильченко В. С. Свойства оптических диэлектрических резонаторов // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293, № 6. С. 1358–1563.
6. Ораевский А. Н., Скалли М., Величанский В. Л. Лазер на основе квантовой точки // Квантовая электроника. 1998. Т. 25, № 3. С. 299–304.
7. Виноградов А. В., Брытов И. А., Грудский А. Я. и др. Отражательная рентгеновская оптика. Л.: Машиностроение, 1989. 463 с.

Рецензент статьи А. В. Андреев

\* \* \*

Александр Владимирович Виноградов, доктор физико-математических наук, профессор Московского физико-технического института, главный научный сотрудник Физического института РАН. Лауреат Государственной премии СССР. Область научных интересов – рентгеновские лазеры, рентгеновская оптика и их применения. Автор около 200 научных работ, в том числе трех монографий.

Анатолий Николаевич Ораевский, доктор физико-математических наук, профессор Московского инженерно-физического института, главный научный сотрудник Физического института РАН. Действительный член Российской академии естественных наук. Лауреат Ленинской премии. Область научных интересов – лазерная физика, лазерная химия, динамика нелинейных систем, сверхпроводимость. Автор более 450 публикаций в научных журналах, 20 изобретений и пяти монографий.